



TITLE:

カレツキアン2階級モデルにおける 所得分配と経済変動 (マクロ経済動 学の非線形数理)

AUTHOR(S):

都築, 栄司; 井上, 智洋; 石山, 健一

CITATION:

都築, 栄司 ...[et al]. カレツキアン2階級モデルにおける所得分配と経済変動 (マクロ経済動学の非線形数理). 数理解析研究所講究録 2011, 1768: 125-142

ISSUE DATE:

2011-10

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/171457>

RIGHT:

カレツキアン2階級モデルにおける所得分配と 経済変動

都築栄司*

井上智洋†

石山健一‡

概要

本稿では、労働者と資本家という2種類の消費を行う経済主体が存在する「カレツキアン2階級モデル」を用いて、財市場の数量調整と所得分配の相互作用によって振動や循環などの複雑な経済変動が生み出され得ることを示す。我々のモデルでは、所得分配率は企業の経営者によって決定されるものと仮定される。経営者の効用関数のパラメーターをどう設定するかによって、モデルの動学的性質は大きく異なってくる。すなわち、均衡経路が決定となったり、不決定となったりする。また、ポアンカレ-ベンディクソンの定理を適用することによって、閉軌道が存在することも示される。

JEL 分類: E12; E32

キーワード: 数量調整、ポスト・ケインジアン、経営者の効用、動学的最適化、ポアンカレ-ベンディクソンの定理

1 序論

本稿では、労働者と資本家という2種類の消費を行う経済主体が存在する「カレツキアン2階級モデル」を用いて、「財市場における数量調整」と「所得分配」の相互作用がさまざまなタイプの経済変動を生み出し得ることを示す。

*中央大学経済研究所; E-mail address: tsuzukie5@gmail.com

†早稲田大学政治経済学術院

‡国士舘大学政経学部

「財市場における数量調整」とは、財の需給の不一致が価格ではなく数量の変動によって行われることである。すなわち、超過需要ならば供給量が増大し、超過供給ならば供給量が減少する。需要量に応じて供給量の調整が行われるというこのようなメカニズムは、Keynes (1936) の「有効需要の原理」に従ったものである。

数量調整メカニズムは、ポスト・ケインジアンと呼ばれる学派のモデルによく見られる。例えば、Chang and Smyth (1971) は、数量調整と資本蓄積の相互作用を描いた非線形マクロ動学モデルを提示し、リミットサイクル（景気循環）の存在を示している。彼らのモデルには Kaldor (1940) に基づく非線形の投資関数が導入されており、それがリミットサイクルを発生させる上で重要な役割を担っている。

また、Asada (2001, 2004) は、数量調整と企業負債の相互作用を描いた非線形マクロ動学モデルを提示し、閉軌道（この場合、いわゆるミンスキー循環¹）が存在することを示している。Asada (2004) はさらに、価格や名目賃金率の伸縮性が経済の安定化というよりむしろ不安定化を助長する可能性があることを示している。このような不安定性は、物価の低下によって企業の実質負債残高が増大し、ひいては有効需要（投資）に対して負の影響がもたらされるという Fisher (1933) の「負債効果」に基づくものに他ならない。Asada (2001, 2004) のモデルでは、フィッシャーの負債効果を導入した投資関数によってさまざまなタイプの経済変動が生み出されている。

このように、Chang and Smyth (1971) でも Asada (2001, 2004) でも、振動や循環などの複雑な変動が出現する上で重要な役割を演じているのが、投資関数である。これに対して本稿では、所得分配率の変動がいかんして経済に振動や循環を生み出すか、ということに焦点を当てる。そのため、前述の3論文とは異なり、投資に関してはかなり単純化したものを考える。すなわち、投資は常に投資率（投資量／資本ストック）を一定に保つように、他の要因からは独立に行われると仮定する。また、政府支出についても、単純化のためにそれは常に国民所得の一定割合だけ行われるものとする。

本稿では他方で、所得分配率が企業の経営者によって内生的に決定されると仮定する。カレツキアン2階級モデルでは、経済は労働者と資本家という2種類の主体によって構成されるが²、労働者は所得のすべてを消費し（消費性向は1）、資本家は所得の一部のみを

¹Minsky (1975, 1986) 参照。

²Kalecki (1971) 参照。

消費する（消費性向は1未満）³。

所得分配率の決定をモデル化する方法の1つに、労働者と資本家の利害闘争を描写する方法がある。例えば、Goodwin (1967) はロトカ-ヴォルテラの捕食者-被食者モデルを労働者と資本家の闘争の記述に応用している。また、Lancaster (1973) は、労働者と資本家の効用関数を明示的に導入した微分ゲームの理論を展開している。これらの理論に対して、本稿では、企業の経営者の効用関数を明示的に導入し、その値を最大化するように、彼らが所得分配率を決定すると仮定する。

経営者の関心は、企業の所有者である資本家（株主）への分配率と産出量の2つにあるとする。これら2つの関心事はパラメーターによって重み付けされる。もし産出量に対するウェイトより資本分配率に対するウェイトのほうが大きければ、経営者は資本家をより重視した姿勢で分配率を決定することになる。一方、もし資本分配率に対するウェイトより産出量に対するウェイトのほうが大きければ、経営者は資本家と労働者の両方を同程度に評価する傾向が強いと言える。

もし企業の経営者が資本分配率を高めると、総消費量（労働者の消費＋資本家の消費）は減少する。したがって、産出量も減少する。逆に、経営者が労働分配率を高めると、総消費量（したがって、産出量）は増大するが、資本分配率は低下する⁴。このような状況の下で、経営者は最適な所得分配率を選択する。

我々は、以上のような「財市場における数量調整」と「内生的な所得分配」という2つの構成要素から成るマクロ動学モデルの動学的性質を検証する。経営者の効用関数のパラメーターをどう設定するかによって、その動学的性質は大きく異なってくる。すなわち、均衡経路が決定となったり、不決定となったりする。

さらに、閉軌道が存在する可能性のあることも示される。このことは、ポアンカレ-ベンディクソンの定理を用いることによって示される。ここで示される閉軌道は、ロトカ-ヴォルテラの捕食者-被食者モデルにおけるそれと同じタイプのものである⁵。

³Asada (2001, 2004) でもこのようなカレツキ流の2階級モデルが採用されているが、所得分配率は本稿と異なり、常に一定であると仮定されている。

⁴労働分配率を高めると消費（産出）が増大し、結果として企業と労働者の双方が有利な状況になるという現象は、「フォーディズム」と呼ばれる生産体制において見られる。それはまたレギュレーション理論の中核的議論でもある。逆に、21世紀の先進国の経済が軒並み停滞しているのは、フォーディズム体制が崩れたからだとも考えられる。本稿のモデルはそのことを論証し得るものである。

⁵経済モデルでは、Goodwin (1967) や Asada (2001) などがロトカ-ヴォルテラ・モデルの応用例である。Asada (2001) では、ホップ分岐定理を用いることによって閉軌道の存在が示されている。ポアンカレ-ベン

本稿のモデルの特徴をまとめると、以下のようになる。

- 数量調整関数に従って、財市場の不均衡が是正される。
- 経済は労働者、資本家、経営者、および政府から成る。
- 企業の経営者はその効用を最大化するように、資本（労働）分配率を決定する。（所得分配の内生化）
- 外需は存在しない。
- 物価の変動は存在しない。（名目値と実質値の区別はない。ここでは物価=1とする）

2 モデル

2.1 総需要と数量調整過程

総需要は、消費、投資、および政府支出の3項目によって構成されとする。

消費に関して、我々は次のようなカレツキ流の2階級経済を想定する。

$$C = C_w + C_r \quad (1)$$

$$C_w = (1 - \tau)zY \quad (2)$$

$$C_r = (1 - s)(1 - \tau)(1 - z)Y + (1 - s)(p_B B - p_B \dot{B}) \quad (3)$$

ここで、 C は総消費量、 C_w は労働者の消費量、 C_r は資本家の消費量、 z は労働分配率（よって、 $1 - z$ は資本分配率）、 Y は国民所得（産出量）、 B は債券保有者に每期、その価値と同額の貨幣を支払うことを約束する永久公債（コンソル公債）、 $p_B (> 0)$ は債券価格、 τ ($0 < \tau < 1$) は所得税率、 s ($0 < s < 1$) は資本家の限界貯蓄性向である。この定式化は、労働者は可処分所得のすべてを消費する（限界消費性向は1）が、資本家は可処分所得の一部のみを消費する（限界消費性向は $0 < 1 - s < 1$ ）ということを表している。また、資本家は利子所得の一部も消費すると想定されている。ただし、利子所得には

ディクソンの定理の応用例としては、Chang and Smyth (1971) や浅田 (1997) 第1章が挙げられる。

税金はかからないものとしている。債券価格 p_B は債券市場の均衡が常に成立するほど伸縮的であるとする。

投資については、次のような単純な投資関数を想定する。

$$h = \frac{I}{K} = \frac{\dot{K}}{K} = \bar{h} = \text{const.} > 0 \quad (4)$$

ここで、 h は投資率（投資量／資本ストック）、 I は投資量、 K は資本ストックである。この式は、投資は常に投資率を一定に保つように行われるということを表している。なお、資本減耗はないものとしている。

政府支出についても、単純なものを仮定する。ここでは、政府は常に国民所得の一定割合（ $0 < \gamma < 1$ ）だけ支出を行うと仮定する。すなわち、

$$G = \gamma Y \quad (5)$$

である。政府の予算制約式は、

$$G + p_B B - \tau Y = p_B \dot{B} \quad (6)$$

によって与えられる。

最後に、財市場における数量調整過程を以下のように定式化する。

$$\dot{Y} = \alpha(C + I + G - Y) \quad (7)$$

ここで、 α (> 0) は財市場の調整速度である。(7) 式は、超過需要 ($C + I + G > Y$) ならば産出量が増大し、超過供給 ($C + I + G < Y$) ならば産出量が減少するということを表している。

(1)-(6) 式を (7) 式に代入すると、

$$\dot{y} = \alpha[-s(1 - \tau)(1 - z)y + \bar{h} + \{s(\gamma - \tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}y] \quad (8)$$

が得られる。ここで、 $y = Y/K$ である。

2.2 経営者の効用関数

企業の経営者は、企業の所有者（株主）である資本家への分配率（ $1 - z$ ）と産出（ y ）から効用を得るものとする。これらの効用は、効用関数の中では加法的に分離可能であるとする。このことは、一方の限界効用は他方の変数から独立であるということを意味する。

資本分配率から得られる効用を $u_1(1-z)$ 、産出から得られる効用を $u_2(y)$ と表す。これらの関数は、 $u'_1 > 0, u''_1 < 0, u'_2 > 0, u''_2 < 0$ という性質を持つと仮定する。さらに、 u_1 と u_2 はパラメーター a ($0 < a < 1$) によって重み付けされるとする。すなわち、経営者の効用関数を $u(z, y)$ とすると、

$$u(z, y) = au_1(1-z) + (1-a)u_2(y) \quad (9)$$

である。もし $a > 0.5$ ならば、経営者は資本家をより重視した姿勢で分配率を決定することになる。一方、もし $a < 0.5$ ならば、経営者は資本家と労働者の両方を同程度に評価する傾向がより強いということになる。

企業の経営者は、(8) 式を制約条件、 $y(0)$ を所与として、無限期間にわたる効用の流列の割引現在価値：

$$V = \int_0^{\infty} [au_1(1-z) + (1-a)u_2(y)]e^{-\rho t} dt \quad (10)$$

を最大化するように、所得分配率 z を選択する。ここで、 ρ (> 0) は経営者の主観的割引率である。

この最適化問題のハミルトニアンは、

$$\mathcal{H} = au_1(1-z) + (1-a)u_2(y) + \mu\alpha[-s(1-\tau)(1-z)y + \bar{h} + \{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}y] \quad (11)$$

によって与えられる。ここで、 μ は状態変数 y の共役変数である。最適化のための1階の条件は、

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} = -au'_1(1-z) + \mu\alpha s(1-\tau)y = 0 \quad (12)$$

$$\dot{\mu} = \rho\mu - \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} = \rho\mu - (1-a)u'_2(y) + \mu\alpha s(1-\tau)(1-z) - \mu\alpha\{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\} \quad (13)$$

となる。横断性条件は、

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu y e^{-\rho t} = 0 \quad (14)$$

である。

(12) 式から、

$$\mu = \frac{au'_1(1-z)}{\alpha s(1-\tau)y} \quad (15)$$

そして

$$\begin{aligned}\frac{\dot{\mu}}{\mu} &= -\frac{u_1''(1-z)}{u_1'(1-z)}\dot{z} - \frac{\dot{y}}{y} \\ &= \eta \frac{\dot{z}}{1-z} - \frac{\dot{y}}{y}\end{aligned}\quad (16)$$

が得られる。ただし、 η は資本分配率の限界効用の弾力性であり、 $\eta = -\frac{(1-z)u_1''(1-z)}{u_1'(1-z)}$ と定義される。

また、(13)式から、

$$\frac{\dot{\mu}}{\mu} = \rho - \frac{1}{\mu}(1-a)u_2'(y) + \alpha s(1-\tau)(1-z) - \alpha\{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\} \quad (17)$$

が得られる。

(17)式に(15)式と(16)式を代入すると、

$$\begin{aligned}\eta \frac{\dot{z}}{1-z} - \frac{\dot{y}}{y} &= \rho - \alpha s(1-\tau)y \frac{1-a}{a} \frac{u_2'(y)}{u_1'(1-z)} + \alpha s(1-\tau)(1-z) - \alpha\{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\} \\ &= \rho - \alpha s(1-\tau)(1-z) \left\{ \frac{y}{1-z} \frac{1-a}{a} \frac{u_2'(y)}{u_1'(1-z)} - 1 \right\} - \alpha\{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}\end{aligned}\quad (18)$$

となる。さらに、(8)式を代入すると、

$$\begin{aligned}\dot{z} &= \frac{1}{\eta} \left[\alpha\{-s(1-\tau)(1-z) + \frac{\bar{h}}{y} + s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}(1-z) + \rho(1-z) \right. \\ &\quad \left. - \alpha s(1-\tau)(1-z)^2 \left\{ \frac{y}{1-z} \frac{1-a}{a} \frac{u_2'(y)}{u_1'(1-z)} - 1 \right\} - \alpha\{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}(1-z) \right]\end{aligned}\quad (19)$$

が得られる。

2.3 微分方程式系

(8) 式と (19) 式は次のような 2 次元の非線形微分方程式系を構成する。

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \dot{y} &= \alpha[-s(1-\tau)(1-z)y + \bar{h} + \{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}y] \\
 (ii) \quad \dot{z} &= \frac{1}{\eta} \left[\alpha\{-s(1-\tau)(1-z) + \frac{\bar{h}}{y} + s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}(1-z) + \rho(1-z) \right. \\
 &\quad \left. - \alpha s(1-\tau)(1-z)^2 \left\{ \frac{y}{1-z} \frac{1-a}{a} \frac{u'_2(y)}{u'_1(1-z)} - 1 \right\} - \alpha\{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}(1-z) \right]
 \end{aligned} \tag{20}$$

なお、債券 B の動学は、上記体系によって決定される y (すなわち Y) の動学を所与として、(6) 式から独立に決まる。

ところで、貨幣的成長理論などでは、個人の効用は消費量 c と貨幣残高 m の両方に依存すると仮定される。効用関数は、 $u(c) + v(m)$ などと表される。ここで、関数 u と v は、 $u' > 0, u'' < 0, v' > 0, v'' < 0$ という性質を満たす。Siegel (1983) では、効用関数を対数型に特定化し、 $\beta_1 \ln c + \beta_2 \ln m$ と表している。ここで、 β_1 と β_2 は正の定数である。また、内生的成長理論の Barro (1990) のモデルでは、効用関数は $u = \frac{(c^{1-\beta} g^\beta)^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$ と特定化されている。ただし、 c は民間消費、 g は政府消費、 $0 < \beta < 1, \sigma > 0$ である。 $\sigma \rightarrow 1$ ならば、 $u = (1-\beta) \ln c + \beta \ln g$ となり、効用関数は対数線形型になる。

本稿でも、これらの特定化に倣い、議論の簡単化のために、関数 u_1 と u_2 を

$$\begin{aligned}
 u_1(1-z) &= \ln(1-z) \\
 u_2(y) &= \ln y
 \end{aligned}$$

と対数型に特定化する。

この場合、 $u'(1-z) = \frac{1}{1-z}$ 、 $u'_2(y) = \frac{1}{y}$ 、および $\eta = 1$ となる。したがって、体系 (20) は、

$$\begin{aligned}
 (i) \quad \dot{y} &= \alpha[-s(1-\tau)(1-z)y + \bar{h} + \{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}y] \equiv f_1(y, z) \\
 (ii) \quad \dot{z} &= \alpha[-s(1-\tau)(1-z) + \frac{\bar{h}}{y} + s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}](1-z) + \rho(1-z) \\
 &\quad - \alpha s(1-\tau)(1-z)^2(A-1) - \alpha\{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}\}(1-z) \equiv f_2(y, z)
 \end{aligned} \tag{21}$$

と書き換えられる。ただし、 $A = \frac{1-a}{a}$ である。

以下では、体系 (20) に代えて、体系 (21) の動学的性質を検証することとする。体系 (21) の非自明な定常解 (y^*, z^*) は、

$$y^* = \frac{\bar{h}}{(1 - z^*)s(1 - \tau) - s(\gamma - \tau) + \frac{\bar{h}}{\alpha}} \quad (22)$$

$$z^* = 1 - \frac{\rho + \bar{h} - \alpha s(\gamma - \tau)}{\alpha s(1 - \tau)(A - 1)} \quad (23)$$

となる。ここで、次の仮定を設ける。

仮定 1

- (i) $(1 - z^*)s(1 - \tau) + \frac{\bar{h}}{\alpha} > s(\gamma - \tau)$
- (ii) $A > 1$ ならば $\rho + \bar{h} > \alpha s(\gamma - \tau)$ 、 $A < 1$ ならば $\rho + \bar{h} < \alpha s(\gamma - \tau)$ 。
- (iii) $\frac{\rho + \bar{h} - \alpha s(\gamma - \tau)}{\alpha s(1 - \tau)(A - 1)} < 1$

仮定 1 (i) は $y^* > 0$ であることを保証する。また、仮定 1 (ii) と (iii) は $0 < z^* < 1$ であることを保証する。なお、(ii) は、 $A < 1$ の場合には $\gamma > \tau$ でなければならないことを意味する。

3 動学分析

本節では、体系 (21) の定常点の回りでの解の動態を明らかにする。定常点で評価した体系 (21) のヤコビ行列 J^* は、

$$J^* = \begin{bmatrix} f_{11}^* & f_{12}^* \\ f_{21}^* & f_{22}^* \end{bmatrix} \quad (24)$$

となる。ここで、

$$\begin{aligned}
 f_{11}^* &= -\alpha s(1-\tau)(1-z) + \alpha \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} \\
 f_{12}^* &= \alpha s(1-\tau)y \\
 f_{21}^* &= -\alpha(1-z)\frac{\bar{h}}{y^2} \\
 f_{22}^* &= \alpha s(1-\tau)(1-z) - \rho + 2\alpha s(1-\tau)(1-z)(A-1) + \alpha \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} \\
 &= \alpha s(1-\tau)(1-z) - \alpha s(1-\tau)(1-z)(A-1) - \alpha \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} \\
 &\quad + 2\alpha s(1-\tau)(1-z)(A-1) + \alpha \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} \\
 &= \alpha s(1-\tau)(1-z) + \alpha s(1-\tau)(1-z)(A-1) \\
 &= \alpha s(1-\tau)(1-z)A
 \end{aligned}$$

である。なお、各式の右辺では定常値を表す上付記号、アステリスク (*) は省略している。

ここで、 $A_0 = 1 - \frac{s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha}}{s(1-\tau)(1-z^*)}$ と定義する。仮定 1 (i) と (ii) により、 $A < 1$ ならば $0 < A_0 < 1$ である。

命題 1 行列 J^* について次のことが言える。

- $A > 1$ のとき、行列 J^* は正と負の実固有値を 1 つずつ持つ。
- $A < 1$ のとき、 $A > A_0$ ならば行列 J^* は正の実部を持つ固有値を 2 つ持ち、 $A < A_0$ ならば行列 J^* は負の実部を持つ固有値を 2 つ持つ。

証明 行列 J^* の行列式 $\det J^*$ は、

$$\begin{aligned}
 \det J^* &= f_{11}^* f_{22}^* - f_{12}^* f_{21}^* \\
 &= -[\alpha s(1-\tau)(1-z)]^2 A + \alpha^2 s(1-\tau)(1-z) A \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} + \alpha^2 s(1-\tau)(1-z) \frac{\bar{h}}{y} \\
 &= -[\alpha s(1-\tau)(1-z)]^2 A + \alpha^2 s(1-\tau)(1-z) A \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} + [\alpha s(1-\tau)(1-z)]^2 \\
 &\quad - \alpha^2 s(1-\tau)(1-z) \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} \\
 &= [\alpha s(1-\tau)(1-z)]^2 (1-A) - \alpha^2 s(1-\tau)(1-z) \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} (1-A) \\
 &= \alpha^2 s(1-\tau)(1-z)(1-A) \left[(1-z)s(1-\tau) - \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} \right]
 \end{aligned}$$

となる。一方、行列 J^* のトレース $\text{tr} J^*$ は、

$$\begin{aligned}
 \text{tr} J^* &= f_{11}^* + f_{22}^* \\
 &= -\alpha s(1-\tau)(1-z) + \alpha \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} + \alpha s(1-\tau)(1-z) A \\
 &= \alpha s(1-\tau)(1-z)(A-1) + \alpha \left\{ s(\gamma-\tau) - \frac{\bar{h}}{\alpha} \right\} \\
 &= \alpha s(1-\tau)(1-z)(A-A_0)
 \end{aligned}$$

となる。

- 仮定 1 (i) の下では、 $A > 1$ のとき $\det J^* < 0$ となる。よって、行列 J^* は正と負の実固有値を 1 つずつ持つ。
- 仮定 1 (i) の下では、 $A < 1$ のとき $\det J^* > 0$ となる。一方、 $A > A_0$ ならば $\text{tr} J^* > 0$ 、 $A < A_0$ ならば $\text{tr} J^* < 0$ となる。よって、行列 J^* は、 $A > A_0$ ならば正の実部を持つ固有値を 2 つ持ち、 $A < A_0$ ならば負の実部を持つ固有値を 2 つ持つ。

□

ところで、陰関数定理により、体系 (21) から、

$$\begin{aligned}\left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{y}=0} &= -\frac{f_{11}^*}{f_{12}^*} > 0 \\ \left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{z}=0} &= -\frac{f_{21}^*}{f_{22}^*} > 0 \\ \left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{y}=0} - \left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{z}=0} &= -\frac{f_{11}^*f_{22}^* - f_{12}^*f_{21}^*}{f_{12}^*f_{22}^*} = -\frac{\det J^*}{f_{12}^*f_{22}^*}\end{aligned}$$

が成り立つ。 $\det J^* < 0$ ならば $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{y}=0} - \left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{z}=0} > 0$ となるので、 (y, z) 平面において $\dot{z} = 0$ 線より $\dot{y} = 0$ 線のほうが急な傾きを持つ (図 1)。一方、 $\det J^* > 0$ ならば $\left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{y}=0} - \left.\frac{dz}{dy}\right|_{\dot{z}=0} < 0$ となるので、 (y, z) 平面において $\dot{y} = 0$ 線より $\dot{z} = 0$ 線のほうが急な傾きを持つ (図 2, 3)。

かくして、定常点の近傍の局所的位相図は、 $A > 1$ ならば図 1、 $A_0 < A < 1$ ならば図 2、そして $0 < A < A_0$ ならば図 3 のようにそれぞれ描かれる。

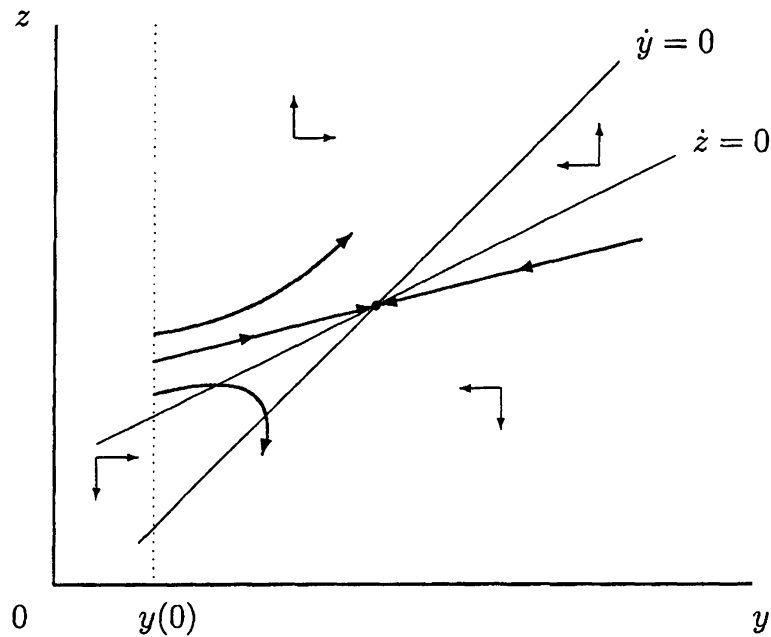
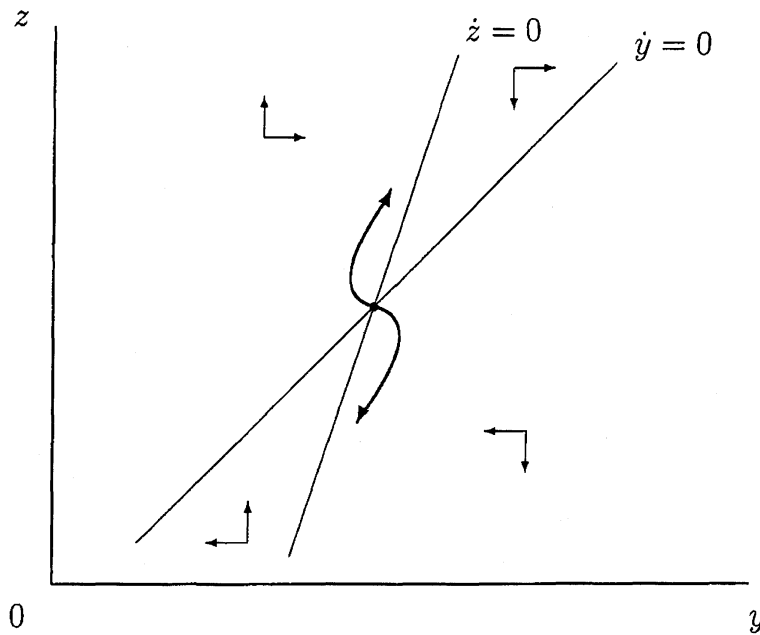


図 1: $A > 1$ の場合

これらの図が示すように、 $A > 1$ の場合には均衡経路（定常点に収束する経路）は一意に存在するが、 $A < 1$ の場合にはそれは不決定となったり、存在しなかったりする。なお、図 2 と 3 の場合、固有値が共役複素数であると振動が発生する。

図 2: $A_0 < A < 1$ の場合

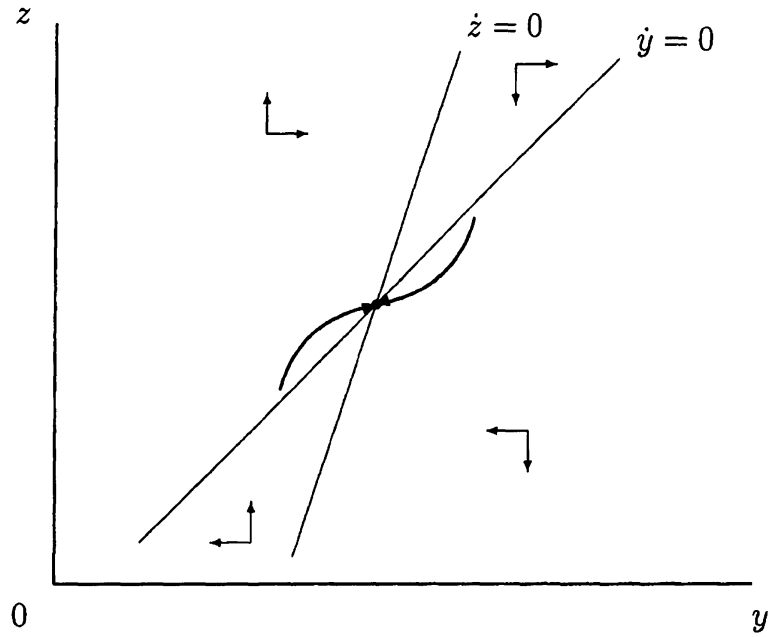
これまで、我々は A を定数とみなしてきたが、以下では次のような性質を持つ関数であると仮定しよう。

仮定 2 $A = A(z)$, $A'(z) > 0$ for all $z \neq z^*$, $A'(z^*) = 0$, $A''(z) < 0$ for $z \in (0, z^*)$, $A''(z) > 0$ for $z \in (z^*, 1)$.

$A'(z) > 0$ for all $z \neq z^*$ という仮定は、定常値以外の z に対しては、 A は z の増加関数であるということを意味している。これは、労働分配率 z の上昇は労働者（労働組合）の力を増大させ、それが A の増大（経営者の産出に対するウェイトの上昇）をもたらすと考えられるからである。ただし、この効果は経営者にとっては外部的なものであり、経営者は z の選択（動学的最適化）の際にはこの効果は考慮しないものとする⁶。また、 $A'(z^*) = 0$ という仮定は、定常状態では z の増大に対して A は変化しないことを意味している。

さらに、 $A''(z) < 0$ for $z \in (0, z^*)$ および $A''(z) > 0$ for $z \in (z^*, 1)$ という仮定は、 $0 < z < z^*$ という領域では $A(z)$ は z の逓減的な増加関数であるが、 $z^* < z < 1$ という領域

⁶ここでは、資本分配率のウェイト (a) は一定とし、産出のウェイトのみを z の関数と考える必要がある。なぜなら、もし a が z の関数であると、(15) 式から (16) 式を求める際に、 a を通じた z の変化も考慮しなければならず、それは分析をかなり複雑化するからである。

図 3: $0 < A < A_0$ の場合

では $A(z)$ は z の逓増的な増加関数であるということを意味している。これは、 $0 < z < z^*$ という領域では資本家の力が強く、 z の増大に対して $A(z)$ は逓減的にしか増大しないが、 $z^* < z < 1$ という領域では逆に労働者の力が強く、 z の増大に対して $A(z)$ は逓増的に増大すると考えられるからである。

仮定 2 の下では、

$$f_{21} = -\alpha(1-z)\frac{\bar{h}}{y^2}$$

$$f_{22} = \alpha s(1-\tau)(1-z)[A - (1-z)A'(z)]$$

となる⁷。したがって、 (z, y) 平面上における $\dot{z} = 0$ 線の傾きは、

$$\left. \frac{dy}{dz} \right|_{\dot{z}=0} = \frac{\alpha s(1-\tau)(1-z)[A - (1-z)A'(z)]y^2}{\alpha(1-z)\bar{h}} \quad (25)$$

によって与えられる。

ここで、次の仮定を追加しよう。

仮定 3 比較的小さい z と比較的大きい z に対しては $A < (1-z)A'(z)$ であり、 z の中間領域（定常点の近傍）では $A > (1-z)A'(z)$ である。

⁷ 定常状態では $A'(z) = 0$ であるから、 $f_{22}^* = \alpha s(1-\tau)(1-z)A$ となり、以前の結果と一致する。

この仮定は、 (z, y) 平面において、比較的小さい z と比較的大きい z に対しては $\dot{z} = 0$ 線は負の傾きを持つが、 z の中間領域ではそれは正の傾きを持つということを意味している⁸。仮定3の下では、 $\dot{z} = 0$ 線は図4のようにS字に湾曲する。なお、ここでは $\lim_{z \rightarrow 0} A'(z) = \infty$ も仮定している。

ここで、次の定理を提出しておこう。

定理 1 (ポアンカレ-ベンディクソン) 平面の C^1 級力学系の非空でコンパクトな極限集合が均衡点を含まなければ閉軌道である。

この定理の証明については、Hirsch and Smale (1974) や Guckenheimer and Holmes (1983) などを参照のこと。

以上の準備の下で、我々は次の命題を提出することができる。

命題 2 $A_0 < A(z^*) < 1$ のとき、体系 (21) の定常点の周りには閉軌道が存在し、定常点を除く任意の点を出発した解は閉軌道に収束する。

証明 ポアンカレ-ベンディクソンの定理を適用するための条件が満たされることを示す。

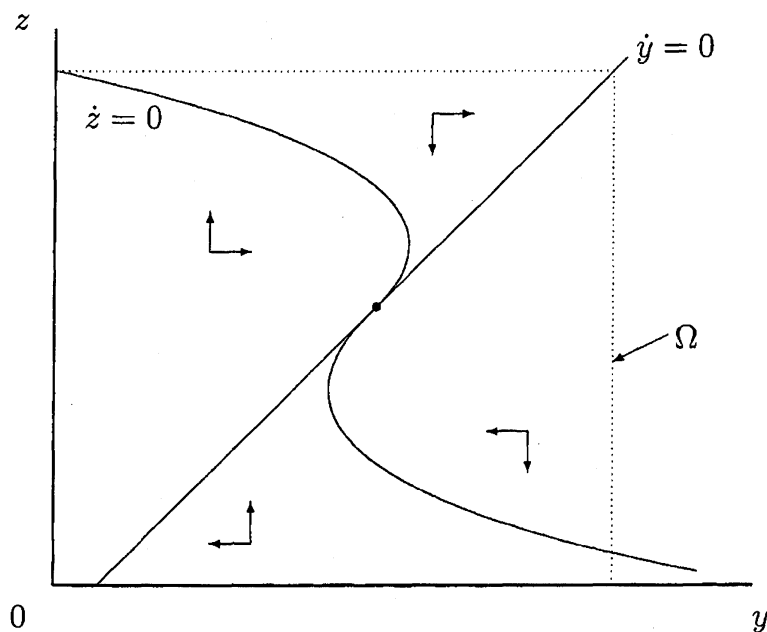


図 4: コンパクト集合 Ω

⁸このことは、仮定2によって正当化され得る。

図4に示されるような非空なコンパクト集合 Ω を考える。 Ω の外側の点から出発する解は十分に時間が経過すれば Ω に入り、 Ω の内側の点から出発する解はどれだけ時間が経過しても Ω から出ることはない。したがって、解の極限集合は Ω の内部に存在する。一方、命題1により、 $A_0 < A(z^*) < 1$ の場合には解が定常点に収束することはない。

以上のことから、定理1が適用され、体系(21)の定常点の回りには閉軌道が存在し、定常点を除く任意の点を出発した解は閉軌道に収束することが分かる。□

4 結論

本稿では、「財市場における数量調整」と「内生的な所得分配」という2つの構成要素によって特徴付けられるマクロ動学モデルを提示し、それらの相互作用によって振動や循環などの複雑な経済変動が生み出され得ることを示した。我々のモデルでは、企業の経営者が効用を最大化するように、所得分配率を決定する。

本稿のモデルでは、産出（産出-資本比率） y の変化率は労働分配率 z の増加関数となるが、労働分配率の変化率は産出の減少関数となる。このようなモデルの構造は、ロトカ-ヴォルテラの捕食者-被食者モデルに類似したものである。我々のモデルでは、 y が捕食者に、 z が被食者に対応する。

もし産出 y が増大したとすると、それは労働分配率 z の低下を誘発する。このことは総消費量 C の減少をもたらし、数量調整関数に従い、産出 y を減少させる。産出の減少は労働分配率を上昇させ、総消費量の増大を誘発する。そして、再び産出の増大をもたらす。この動学過程を図示すれば、

$$y \uparrow \Rightarrow z \downarrow \Rightarrow C \downarrow \Rightarrow y \downarrow \Rightarrow z \uparrow \Rightarrow C \uparrow \Rightarrow y \uparrow$$

となる。

我々は、上記の動学過程が実際に循環的変動を生み出し得ることを、ポアンカレ-ベンディクソンの定理を用いて示した。したがって、我々のモデルでは、たとえ外生的ショックが存在しなかったとしても、経済変動が持続する可能性がある。

モデルの動学的性質がどのようなものとなるかを決定する上で重要な役割を担うのは、経営者の効用関数に存在するパラメーター A （ $= \frac{1-a}{a}$ ）である。もし $A > 1$ ならば、経営者は資本分配率より産出を増大させることにより大きな関心を持つことになる。一方、も

し $A < 1$ ならば、経営者は産出より資本分配率を高めることにより大きな関心を持つことになる。 $A > 1$ の場合、均衡経路の一意性は保証される。しかし、 $A < 1$ の場合には、振動や不決定性が発生する。このことは、企業の経営者が産出の増大により大きな関心を持つことは経済の安定化に寄与するということを意味している。

参考文献

- [1] 浅田統一郎 (1997). 『成長と循環のマクロ動学』, 日本経済評論社.
- [2] Asada, T. (2001). "Nonlinear Dynamics of Debt and Capital: A Post-Keynesian Analysis," in Y. Aruka and Japan Association for Evolutionary Economics (ed.) *Evolutionary Controversies in Economics: A New Transdisciplinary Approach*, Tokyo: Springer-Verlag, 73–87.
- [3] Asada, T. (2004). "Price Flexibility and Instability in a Macrodynamic Model with a Debt Effect," *Journal of International Economic Studies* 18, 41–60.
- [4] Barro, R. J. (1990). "Government Spending in a Simple Model of Endogenous Growth," *Journal of Political Economy* 98, S103–S125.
- [5] Chang, W. and Smyth, D. (1971). "The Existence and Persistence of Cycles in a Nonlinear Model: Kaldor's 1940 Model Re-examined," *Review of Economic Studies* 38, 37–44.
- [6] Fisher, I. (1933). "The Debt-deflation Theory of Great Depressions," *Econometrica* 1, 337–357.
- [7] Goodwin, R. M. (1967). "A Growth Cycle," in C. H. Feinstein (ed.) *Socialism, Capitalism and Economic Growth*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [8] Guckenheimer, J. and Holmes, P. (1983). *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcation of Vector Fields*, Berlin: Springer-Verlag.

- [9] Hirsch, M. W. and Smale, S. (1974). *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*, New York: Academic Press. (田村一郎・水谷忠・新井紀久子訳『力学系入門』岩波書店, 1976)
- [10] Kaldor, N. (1940). "A Model of the Trade Cycle," *Economic Journal* 50, 78–92.
- [11] Kalecki, M. (1971). *Selected Essays on the Dynamics of the Capitalist Economy*, Cambridge: Cambridge University Press.
- [12] Keynes, J. M. (1936). *The General Theory of Employment, Interest and Money*, London: Macmillan.
- [13] Lancaster, K. (1973). "The Dynamic Inefficiency of Capitalism," *Journal of Political Economy* 81, 1092–1109.
- [14] Minsky, H. P. (1975). *John Maynard Keynes*, New York: Columbia University Press.
- [15] Minsky, H. P. (1986). *Stabilizing an Unstable Economy*, New Haven: Yale University Press.
- [16] Siegel, J. J. (1983). "Technological Change and the Superneutrality of Money," *Journal of Money, Credit and Banking* 15, 363–367.